Analysis

Integration von Exponentialfunktionen

mit Substitution und mit partieller Integration

Datei Nr. 45041

Stand 18. Februar 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Weitere Texte zur Integration

Zu Exponentialfunktionen gehören auch diese Texte: 45040 / 45041 / 48015

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen. Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren. Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.

Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Gebrochen rationalen Funktionen:

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden - Übersicht
Datei Nr. 48051	Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Sammlung schwerer Integrale

Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh

Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Auf Grund der Stoffreduktion im Gymnasium werden Exponentialfunktionen oft nur noch auf einem Grundniveau behandelt. Daher fällt dann Integration mit Substitution und partieller Integration weg.
Für diese einfachen Anforderungen habe ich den Text 45040 geschrieben.
In vorliegendem Text wird dies nur kurz angedeutet. Er befasst sich also auch mit den anspruchsvolleren Methoden der Substitution und der partiellen Integration.
Außerdem gibt es einen kompakten Text: 48010 Integration – Grundniveau
Dort findet man weitere Beispiele und Aufgaben zu den genannten Funktionstypen. Es ist ein reiner Trainingstext.

Inhalt

1	**Integrale von einfachen Exponentialfunktionen**	4
	1.1 Unbestimmte Integrale = Stammfunktionen	4
	1.2 Bestimmte Integrale mit innerer Ableitung (Kettenregel)	6
	Aufgabenblatt zur einfachen Integration (Aufgaben 1 bis 3)	7
2	**Integration mit Substitution**	8
	2.1 Information zum Differenzial	8
	2.2 Substitution an einem Beispiel	8
	2.3 Substitution zur Vereinfachung von Integralen mit e-Funktionen	9
3	**Integration mit erweiterter Substitution**	11
	Trainingsaufgaben 4	12
4	**Integration höheres Niveau**	13
	Teils mit Arkustangens und Partialbruchzerlegung	
5	**Partielle Integration**	16
	5.1 Herleitung der Formel	16
	5.2 Anwendung bei Exponentialfunktionen	17
	5.3 Zweifache partielle Integration $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot e^{-x} dx$	22
	Trainingsaufgaben 5	22
	Lösung aller Trainingsaufgaben	24 - 28

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1. Integration von einfachen Exponentialfunktionen

1.1 Unbestimmte Integrale = Stammfunktionen: Zusammenfassung aus Text 45040

Eine Stammfunktion F einer Funktion f ist eine Funktion mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$.
Also erhält man eine Stammfunktion durch die Umkehrung der Ableitung, also durch „Aufleiten".
Da beim Ableiten das Absolutglied verloren geht, kann man es bei der Umkehrung, nicht mehr bestimmen. Daher schreibt man an den allgemeinen Stammfunktionsterm immer + C dazu.

Die „einfachen" Exponentialfunktionen der Form $f(x) = e^{ax+b}$ lassen sich ganz einfach aufleiten:

Beim Integrieren bleibt eine Exponentialfunktion mit einem linearen Exponenten erhalten, es wird lediglich noch durch die innere Ableitung geteilt.

$$\boxed{\int e^{ax+b} = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C}$$

Dies wird ausführlich im speziellen Text 45039 gezeigt. Hier einige Beispiele dazu:

a) Die Stammfunktion von $f(x) = e^x$ ist $F(x) = e^x + C$

Mit der Integralschreibweise sieht das so aus: $F(x) = \int e^x = e^x + C$

Probe: $F'(x) = e^x = f(x)$

b) Die Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x}$ ist $F(x) = -e^{-x} + C$

Integralschreibweise $F(x) = \int e^{-x} = -e^{-x} + C$

Probe: $F'(x) = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} = f(x)$

c) Die Stammfunktion zu $f(x) = e^{-3x}$ ist $F(x) = \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + C = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$

Probe: $F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x} \cdot (-3) = e^{-3x} = f(x)$

d) Die Stammfunktion zu $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ist $F(x) = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$

Probe: $F'(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$

e) $f(x) = e^{2x+1}$ Stammfunktion: $F(x) = \frac{e^{2x+1}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$

Integralschreibweise: $F(x) = \int e^{2x+1} dx = \frac{e^{2x+1}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$

Probe: $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x+2} = e^{2x+1} = f(x)$

f) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+3}$ Stammfunktion: $F(x) = \int e^{\frac{1}{2}x+3} dx = \frac{e^{\frac{1}{2}x+3}}{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x+3} + C$

Probe: $F'(x) = \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2}}_{=1} \cdot e^{\frac{1}{2}x+2} = e^{\frac{1}{2}x+3} = f(x)$

g) $f(x) = 3e^{2-x}$: Stammfunktion: $F(x) = \int 3e^{2-x} dx = 3 \cdot \frac{e^{2-x}}{-1} + C = -3e^{2-x} + C$

Probe: $F'(x) = -3 \cdot (-e^{2-x}) = 3 \cdot e^{2-x} = f(x)$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Es gibt einige kompliziertere Funktionsterme, die sich auf die Form e^{ax+b} bringen lassen. Dann kann man dazu auch eine Stammfunktion berechnen:

h) $\int \frac{1}{2e^{4x}}dx = \int \frac{1}{2}\cdot e^{-4x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-4x}}{-4} + C = -\frac{1}{8}\cdot e^{-4x} + C$

i) $\int \frac{3}{e^{x+1}}dx = \int 3\cdot e^{-(x+1)}dx = \int 3\cdot e^{-x-1}dx = 3\cdot\frac{e^{-x-1}}{-1} + C = -3e^{-x-1} + C$

j) $\int \left(e^x - 1\right)^2 dx = \int \left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C$

Im ersten Schritt wendet man die 2. binomische Formel an: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Dazu muss man wissen, dass $\left(e^x\right)^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$ ist,

k) $\int \left(e^{-x} + 2\right)\left(e^{-x} - 2\right)dx = \int \left(e^{-2x} - 4\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} - 4x + C$

Im ersten Schritt wendet man die 3. binomische Formel an: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Dazu muss man wissen, dass $\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-x}\cdot e^{-x} = e^{-2x}$ ist.

l) $\int \frac{e^x - 2}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)dx = \int \left(1 - 2\cdot e^{-x}\right)dx = x - 2\cdot\left(-e^{-x}\right) + C = x + 2e^{-x} + C$

Im ersten Schritt zerlegt man den Bruch in zwei Einzelbrüche.
Dies geht, ***weil der Nenner keine Summe enthält***.

Dann kürzt man den ersten Bruch, den zweiten schreibt man wie gezeigt um.

m) $\int \frac{e^{2x} + 3}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right)dx = \int \left(e^x + 3\cdot e^{-x}\right)dx = e^x - 3e^{-x} + C$

Der Bruch hat das Merkmal „Keine Summe im Nenner“, also zerlegt man ihn in zwei Brüche und kürzt anschließend, wobei gilt: $\frac{e^{2x}}{e^x} = \frac{e^x \cdot e^x}{e^3} = e^x$

n) $\int \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}}dx = \int \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{2x}}dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{2e^x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)dx = \int \left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)dx =$

$= \int \left(1 - 2e^{-x} + e^{-2x}\right)dx = x - 2(-e^{-x}) + (-\frac{1}{2})e^{-2x} + C = x + 2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

o) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}dx$

Erkennen: Im Zähler steht ein Term, der die Form $a^2 - b^2$ hat, und den man daher mit der 3. binomischen Formel zerlegen kann:

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}dx = \int \frac{\left(e^x - 1\right)\cancel{\left(e^x + 1\right)}}{\cancel{e^x + 1}}dx = \int \left(e^x - 1\right)dx = e^x - x + C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.2 Bestimmte Integrale mit innerer Ableitung

Für bestimmte Anwendungen gibt es eine zweite Art von Integral: **Das bestimmte Integral**.
Dessen Ergebnis ist keine Funktion sondern eine Zahl.

Die **Berechnungsvorschrift** lautet:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Anwendung dieser Regel:

1. Zuerst berechnet man die Stammfunktion F(x) zu f(x).
   Man schreibt sie in eckige Klammern und fügt die „Grenzen“ a und b am Ende dazu.

2. Dann setzt man die obere Grenze b ein, berechnet also F(b).
   Davon subtrahiert man F(a).

Beispiele:

a) $$\int_{-2}^{2} e^{1-x}dx = \left[\frac{e^{1-x}}{-1}\right]_{-2}^{2} = \left[-e^{1-x}\right]_{-2}^{2} = \underbrace{\left[-e^{-1}\right]}_{2\text{ eingestzt}} - \underbrace{\left[-e^{3}\right]}_{-2\text{ eingesetzt}} = e^3 - e^{-1} \approx 19{,}72$$

b) $$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}dx = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}}\right]_0^4 \left[2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^4 = \underbrace{\left[2e^{2}\right]}_{4\text{ eingestzt}} - \underbrace{\left[2e^{0}\right]}_{0\text{ eingesetzt}} = 2e^2 - 2 \approx 12{,}78$$

c) $$\int_1^2 e^{4-2x}dx = \left[\frac{1}{-2}e^{4-2x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}19$$

d) $$\int_0^{\ln 2}\left(4 - \tfrac{1}{2}e^{-x}\right)dx = \left[4x + \tfrac{1}{2}e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = 4\cdot\ln 2 + \tfrac{1}{2}\boxed{e^{-\ln 2}} - 0 - \tfrac{1}{2}\boxed{e^0} = 4\cdot\ln 2 + \tfrac{1}{2}\boxed{e^{\ln\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2}\cdot 1 =$$
$$= 4\cdot\ln 2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 4\cdot\ln 2 - \tfrac{1}{4}$$

e) $$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx = \int_1^2 4e^{-(2x-4)}dx = \int_1^2 4e^{-2x+4}dx = \left[4\cdot\frac{e^{-2x+4}}{-2}\right]_1^2 = -2\left[e^{-2x+4}\right]_1^2$$
$$= -2\left(e^0 - e^2\right) = -2(1-e^2) = -2 + 2e^2$$

f) $$\int_0^2\left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x - \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^2 = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + 2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = \left[2 - 2 + 2\cdot e^{-1}\right] - \left[2\cdot e^0\right] = 2e^{-1} - 2$$

g) $$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-4}{2e^x}dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^{2x}}{2e^x} - \frac{4}{2e^x}\right)dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^x}{2} - \frac{2}{e^x}\right)dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{2}e^x - 2\cdot e^{-x}\right)dx =$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^x + 2\cdot e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = \underbrace{\left[\frac{1}{2}e^{\ln 2} + 2\cdot e^{-\ln 2}\right]}_{\ln 2\text{ eingesetzt}} - \underbrace{\left[\frac{1}{2}\cdot e^0 + 2\cdot e^0\right]}_{0\text{ eingesetzt}} =$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}\cdot 2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\right] - \left[\tfrac{1}{2} + 2\right] = 2 - 2{,}5 = -2{,}5$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt zur einfachen Integration von e-Funktionen

Trainingsaufgaben 1

1) $\int e^{3x}dx$ 2) $\int 4e^{-2x}dx$ 3) $\int 2e^{-\frac{1}{2}x}dx$ 4) $\int \frac{e^{x-2}}{2}dx$

5) $\int e^{4-2x}dx$ 6) $\int \left(4-\frac{1}{2}e^{1-x}\right)dx$ 7) $\int \left(3x-e^{-x}\right)dx$ 8) $\int \frac{1}{2e}dx$

Trainingsaufgaben 2

9) $\int \left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-3\right)dx$ 10) $\int \left(e^{x}+2\right)\left(e^{-x}-1\right)dx$ 11) $\int \frac{e^{x}-4}{2e^{x}}dx$

12) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{x}}dx$ 13) $\int \left(e^{\frac{1}{2}x}-1\right)^{2}dx$ 14) $\int \frac{e^{x}+2e^{-x}}{e^{-x}}dx$

Trainingsaufgaben 3

15) $\int_{2}^{4} e^{\frac{1}{2}x}dx$ 16) $\int_{0}^{2} e^{1-2x}dx$ 17) $\int_{-2}^{1} \frac{2}{e^{2x-1}}dx$

18) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \left(2-e^{x}\right)dx$ 19) $\int_{-t}^{t} te^{t-x}dx$ 20) $\int_{0}^{4} \left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

21) $\int_{\ln 3}^{\ln 9} \left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}dx$ 22) $\int_{1}^{2} \left(e^{2x}-4e^{-x}\right)dx$ 23) $\int_{0}^{2} \frac{1-2e^{-x}}{e^{x}}dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Integration mit Substitution.

2.1 Informationen zum Differenzial dx (Ausführlich: Text 48010)

Das am Ende eines Integrals stehende dx heißt Differential. Es hängt eng mit der Ableitung einer Funktion zusammen. Dies wird ausführlich im Text 48011 dargestellt.
Das Ergebnis dieser Theorie lautet:

Mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnet man die Steigung einer Sekante.
Δy und Δx sind Differenzen.

Mit $m = \frac{dy}{dx} = y'$ berechnet man die Steigung einer Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$. dy und dx heißt man Differenziale.

Wichtig ist hierbei die Formel zur Berechnung des Differenzials von y: $\boxed{dy = y' \cdot dx}$

Beispiele:

a) $y = f(x) = x^2 + 4x + 1$. $y' = f'(x) = 2x + 4$
Für das Differenzial folgt dann: $dy = (2x + 4) \cdot dx$

b) $y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2e^{2x}$ Differenzial: $dy = 2e^{2x} \cdot dx$

Dieses Differenzial taucht im Integral auf, weil diese historische Schreibweise früher sagen sollte: „Das Integral macht das Differenzial rückgängig".

Und so entstand die Schreibweise $y = \int dy = \int y' \cdot dx$, was ja genau dem entspricht, was wir bei der Berechnung einer Stammfunktion machen.

2.2 Substitution zur Vereinfachung eines Integrals an einem Beispiel:

Um das Integral $\int (2x+5)^8 dx$ zu vereinfachen, kann man die Klammer durch u ersetzen.

Man führt also die Substitution $u = 2x + 5$ durch. Dann sieht das Integral so aus: $\int u^8 dx$.

Das dx passt jedoch nicht zu u^8. Das sind verschiedene Variable.
Wenn man schon von x auf u umrechnet, dann muss das auch mit dx geschehen.
Also benötigt man die Formel zur Berechnung eines Differentials von oben:
Sie lautet $dy = y' \cdot dx$. Man verwendet sie jetzt in der Form: $\boxed{du = u' \cdot dx}$

Hier die komplette Substitution: $\boxed{u = 2x + 5} \Rightarrow u' = 2 \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow \boxed{dx = \tfrac{1}{2} \cdot du}$

Damit vereinfacht man das Integral so:

$$\int (2x+5)^8 dx = \int u^8 \cdot \tfrac{1}{2} du = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{u^9}{9} + C$$

Anschließend folgt die **Rücksubstitution**: Man ersetzt u wieder durch 2x+5:

$$\int (2x+5)^8 dx = \int u^8 \cdot \tfrac{1}{2} du = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{u^9}{9} + C = \tfrac{1}{18} \cdot (2x+5)^9 + C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2.3 Substitution zur Vereinfachung von Integralen mit e-Funktionen

Auf CD…

Demo-Text für www.mathe-cd.de